3η δεκάδα θεμάτων επανάληψης

21.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν κάθε τριγώνου δίνεται από τον τύπο

Ε = τρ , όπου **τ** η ημιπερίμετρος του τριγώνου και **ρ** η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου

ii) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

α) Το εμβαδόν κάθε τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$

β) Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των αντιστοίχων βάσεων

γ) Για την διάμεσο μ_α ισχύει $\mu_\alpha = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$

δ) Το εμβαδόν ενός τραπεζίου με βάσεις Β , β και ύψος υ δίνεται από τον τύπο

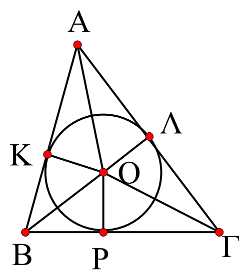
$E = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2}$

iii) Στον παρακάτω πίνακα να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Εμβαδόν κύκλου ακτίνας R	1. $\frac{\pi R^2 \mu^o}{180^o}$
β. Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ^o και ακτίνας R	2. $2\pi R$
γ. Μήκος κύκλου ακτίνας R	3. πR^2
	4. $\frac{\pi R^2 \mu^o}{360^o}$

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή οι πλευρές του τριγώνου εφάπτονται του εγγεγραμμένου κύκλου στα Κ , Λ , Ρ οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις πλευρές οπότε έχουμε

$(AB\Gamma) = (AOB) + (BO\Gamma) + (AO\Gamma) =$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot OK + \frac{1}{2}B\Gamma \cdot OP \ \frac{1}{2}A\Gamma \cdot O\Lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma \cdot \rho + \frac{1}{2}\alpha \cdot \rho \ \frac{1}{2}\beta \cdot \rho = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\rho = \tau\rho$$

ii)

$\alpha \to \Lambda$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Sigma$

iii)

$\alpha \to 3$, $\beta \to 4$, $\gamma \to 2$

22.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΓ = 2\sqrt{3}$, $ΒΓ = 1$ και $\hat{Γ} = 30^o$

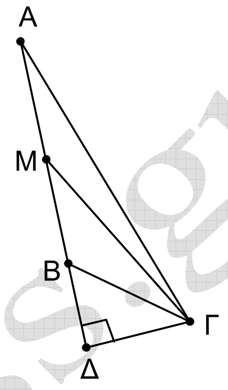
i) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = \sqrt{7}$ και να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου

iii) Να υπολογίσετε την διάμεσο $μ_γ$ και την προβολή αυτής στην πλευρά ΑΒ

Προτεινόμενη λύση

i)



Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΒΓ συν\hat{Γ} =$$

$$= 12 + 1 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 \text{ άρα } ΑΒ = \sqrt{7} .$$

Τώρα αφού

$ΑΓ^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ και $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 7 + 1 = 8$ είναι

$ΑΓ^2 > ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ οπότε θα είναι $\hat{Β} > 90^o$ συνεπώς το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

ii)

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΓΒ\, ημ\hat{Γ} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

iii)

$$μ_γ^2 = \frac{2α^2 + 2β^2 - γ^2}{4} = \frac{2 + 24 - 7}{4} = \frac{19}{4} \text{ άρα } μ_γ = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

Αν ΜΔ είναι η προβολή της διαμέσου ΓΜ στην ΑΒ τότε από το δεύτερο θεώρημα διαμέσων έχουμε

$$ΑΓ^2 - ΒΓ^2 = 2ΑΒ \cdot ΔΜ \Leftrightarrow$$

$$12 - 1 = 2\sqrt{7}\, ΔΜ \Leftrightarrow ΔΜ = \frac{11\sqrt{7}}{14}$$

23.

Δίνεται κύκλος (Ο , R) και σημείο Α ώστε $OA = R\sqrt{13}$. Από το Α φέρνουμε τέμνουσα ΑΔΕ του κύκλου έτσι ώστε ΑΔ = 2ΔΕ .

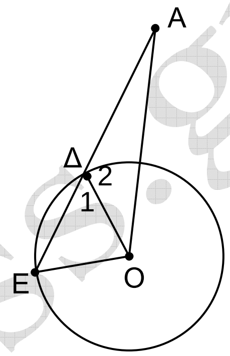
i) Να υπολογίσετε συναρτήσει του R

α) Την δύναμη του Α ως προς τον κύκλο

β) Την χορδή ΔΕ

ii) Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών $\dfrac{(ΟΑΔ)}{(ΟΕΔ)}$

iii) Να υπολογίσετε το $συν\hat{A}$



Προτεινόμενη λύση

i)

α) Η δύναμη του σημείου Α ως προς τον κύκλο (Ο, R) είναι ίση με $Δ^{A}_{(O,\ R)} = OA^2 - R^2 = 13R^2 - R^2 = 12R^2$

β) Γνωρίζουμε ότι

$ΑΔ \cdot ΑΕ = ΟΑ^2 - R^2$ οπότε

$ΑΔ\ (ΑΔ + ΔΕ) = 12R^2 \Leftrightarrow$

$2ΔΕ(3ΔΕ) = 12\ R^2 \Leftrightarrow ΔΕ = R\sqrt{2}$

ii)

Επειδή στα τρίγωνα ΑΟΔ και ΕΟΔ έχουμε $\hat{Δ}_1 + \hat{Δ}_1 = 180^o$ ισχύει

$$\frac{(ΟΑΔ)}{(ΟΕΔ)} = \frac{ΔΟ \cdot ΔΑ}{ΔΟ \cdot ΔΕ} = \frac{ΔΑ}{ΔΕ} = \frac{2ΔΕ}{ΔΕ} = 2$$

iii)

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΟΕ έχουμε ότι

$$EO^2 = AE^2 + AO^2 - 2AE \cdot AO\ συν\hat{A} \quad \Leftrightarrow$$

$$R^2 = 18R^2 + 13R^2 - 2 \cdot 3R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{13}\ συν\hat{A} \quad \Leftrightarrow \quad συν\hat{A} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

24.

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μία διάμετρος του ΑΓ . Η μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ τέμνει τον κύκλο στα Β και Δ

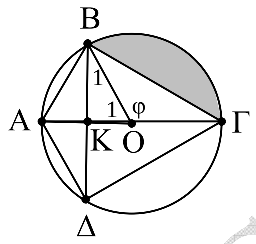
i) Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = R\sqrt{3}$

ii) Να υπολογίσετε συναρτήσει του R το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ

iii) Να υπολογίσετε συναρτήσει του R το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος με χορδή την ΒΓ το οποίο περιέχεται μέσα στην γωνία $Β\hat{Δ}Γ$

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή η ΒΔ είναι μεσοκάθετος στη ακτίνα ΟΑ ,από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΟ έχουμε

$ΒΚ^2 = ΒΟ^2 - ΟΚ^2 =$

$$= R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \text{ άρα } ΒΚ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή δε και ΟΑ μεσοκάθετος της ΒΔ θα είναι

$ΒΔ = 2ΒΚ = R\sqrt{3}$

ii)

Αφού οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι κάθετες το εμβαδό αυτού είναι ίσο με

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΓ \cdot ΒΔ}{2} = \frac{2R \cdot R\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

iii)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΚ είναι $ΟΚ = \frac{ΟΑ}{2} = \frac{ΟΒ}{2}$ άρα

$\hat{Β}_1 = 30^o$ οπότε $\hat{Ο}_1 = 60^o$ και συνεπώς $\hat{φ} = 120^o$

Το εμβαδόν Ε του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος προκύπτει αν από το εμβαδό του κυκλικού τομέα $(Ο\ \overset{\frown}{ΒΓ})$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ οπότε

$$Ε = Ε_{(Ο\overset{\frown}{ΒΓ})} - Ε_{\triangle ΒΟΓ} = \frac{πR^2 120^o}{360^o} - \frac{1}{2}R^2 ημ120^o = \left(\frac{πR^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

25.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας του πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος

ii) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

α) Το εμβαδόν ενός ρόμβου είναι ίσο με το γινόμενο μια του πλευράς επί το αντίστοιχο σε αυτή ύψος

β) Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας των δύο τριγώνων

γ) Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου είναι

$$\varphi_\nu = 180^o - \frac{360^o}{\nu}$$

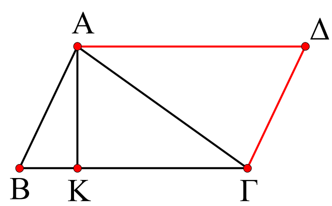
δ) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α είναι ίσο με 2α

iii) Στον παρακάτω πίνακα να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις

Στήλη Α:	Στήλη Β
Κανονικό πολύγωνο	Πλευρά λ_ν
α. Κανονικό εξάγωνο	1. $R\sqrt{2}$
β. Ισόπλευρο τρίγωνο	2. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
Γ. Τετράγωνο	3. $R\sqrt{3}$
	4. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
	5 . R

Προτεινόμενη λύση

i)



Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ . Από το Γ φέρνω παράλληλη στην ΑΒ και από το Α παράλληλη στην ΒΓ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα οι οποίες τέμνονται στο Δ . Τότε

Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και αν ΑΚ $\perp$ ΒΓ το εμβαδό αυτού είναι ίσο με :

(ΑΒΓΔ) = ΒΓ · ΑΚ **(1)**

Επειδή όμως $\triangle AB\Gamma = \triangle A\Delta\Gamma$ θα είναι και $(AB\Gamma) = (A\Delta\Gamma)$ οπότε η **(1)** γίνεται

$2(AB\Gamma) = B\Gamma \cdot AK \Leftrightarrow$

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AK$ δηλαδή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$

ii)

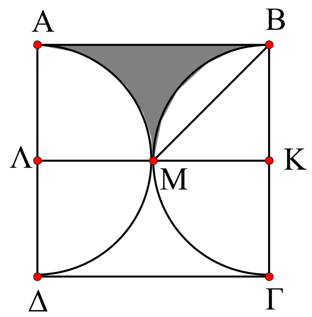
$\alpha \rightarrow \Sigma$, $\beta \rightarrow \Lambda$, $\gamma \rightarrow \Sigma$, $\delta \rightarrow \Lambda$

iii)

$\alpha \rightarrow 5$, $\beta \rightarrow 3$, $\gamma \rightarrow 1$

26.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς ίσης με 4 cm . Με διαμέτρους ΑΔ και ΒΓ γράφουμε κύκλους που εφάπτονται στο Μ , όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα



Να υπολογίσετε

i) Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΒ , όπου Κ το μέσο της ΒΓ

ii) Την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου ΑΜΒ (γκρίζα περιοχή)

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Μ η διάκεντρος ΛΚ διέρχεται από το Μ

Αφού ΑΛ = // ΒΚ και $\widehat{A} = 90^o$ το ΑΒΚΛ είναι ορθογώνιο οπότε ΜΚ $\perp$ ΒΚ

Επομένως

$$(MBK) = \frac{1}{2} KM \cdot KB = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = 2 \text{ cm}^2 .$$

ii)

Η περίμετρος P του μικτογράμμου τριγώνου ΑΜΒ είναι ίση με

$$P = AB + \ell_{\overset{\frown}{AM}} + \ell_{\overset{\frown}{BM}}$$

Όμως ΑΒ = ΛΚ = 4 και

$$\ell_{\overset{\frown}{AM}} = \frac{\pi R \mu^o}{180^o} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 90^o}{180^o} = \pi = \ell_{\overset{\frown}{BM}} \text{ άρα}$$

$$P = (4 + 2\pi) \text{ cm}$$

Το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου ΑΜΒ (γκρίζα περιοχή) είναι ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΚΛ μείον το εμβαδό των δύο ίσων κυκλικών τομέων $K\overset{\frown}{MB}$ και $\Lambda\overset{\frown}{AM}$ άρα

$$E_{\text{ζητούμενο}} = (AB K\Lambda) - 2(K\overset{\frown}{MB}) =$$

$$= AB \cdot K\Lambda - 2\frac{\pi R^2 \mu^o}{360^o} = 4 \cdot 2 - 2\frac{\pi \cdot 4 \cdot 90^o}{360^o} = (8 - 2\pi) \text{ cm}^2$$

27.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α , β , γ ισχύει $3\beta^2 + 2\gamma^2 = 2\alpha^2$

Να αποδείξετε ότι :

i) Για την διάμεσο μ_α ισχύει $\mu_\alpha^2 = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$

ii) $\widehat{A} > 90^o$

iii) Η προβολή ΜΔ της διαμέσου ΒΔ στην πλευρά β είναι ίση με $M\Delta = \dfrac{3\beta}{4}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Γνωρίζουμε ότι $\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$ και λόγω της υπόθεσης

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\alpha^2 - 3\beta^2 - \alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$$

ii)

Αφού $3\beta^2 + 2\gamma^2 = 2\alpha^2$ θα είναι

$\alpha^2 = \dfrac{3}{2}\beta^2 + \gamma^2 > \beta^2 + \gamma^2$ δηλαδή

$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ οπότε $\widehat{A} > 90^o$

iii)

Από το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων και επειδή $\alpha > \gamma$ έχουμε

$\alpha^2 - \gamma^2 = 2\beta M\Delta$ όμως από την υπόθεση έχουμε $\alpha^2 = \dfrac{3}{2}\beta^2 + \gamma^2$

άρα

$$\frac{3}{2}\beta^2 + \gamma^2 - \gamma^2 = 2\beta\, M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{3\beta}{4}$$

28.

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) .

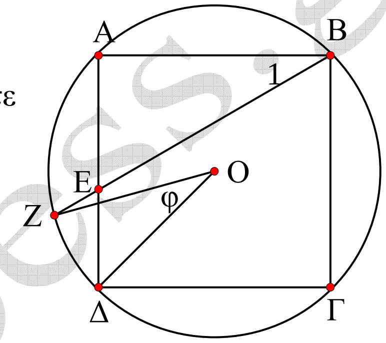
Έστω Ε ένα σημείο της ΑΔ , τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΕ\sqrt{3}$ και Ζ το σημείο τομής της προέκτασης της ΒΕ με τον κύκλο

i) Να εκφράσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου

ii) Να αποδείξετε ότι $ΕΖ = \frac{3-\sqrt{3}}{6}α$

iii) Να βρείτε ως συνάρτηση του α το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $Δ\hat{Ο}Ζ$

Προτεινόμενη λύση



i)

$ΑΔ = ΑΕ\sqrt{3} \Leftrightarrow α = ΑΕ\sqrt{3} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{α\sqrt{3}}{3}$ οπότε

από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε

$ΒΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΕ^2 = α^2 + \left(\frac{α\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4α^2}{3}$

άρα $ΒΕ = \frac{2α\sqrt{3}}{3}$

ii)

Από το θεώρημα των τεμνόμενων χορδών έχουμε

$ΑΕ \cdot ΕΔ = ΒΕ \cdot ΕΖ \Leftrightarrow$

$\frac{α\sqrt{3}}{3} \cdot (α - \frac{α\sqrt{3}}{3}) = \frac{2α\sqrt{3}}{3} \cdot ΕΖ \Leftrightarrow ΕΖ = \frac{3-\sqrt{3}}{6}α$

iii)

Παρατηρούμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε

$ΑΕ = \frac{α\sqrt{3}}{3}$ και $ΒΕ = \frac{2α\sqrt{3}}{3}$ άρα $ΑΕ = \frac{ΒΕ}{2}$ οπότε $\hat{Β}_1 = 30^o$ συνεπώς

$\overset{\frown}{ΑΖ} = 60^o$ οπότε αφού $\overset{\frown}{ΑΔ} = 90^o$ θα είναι $\overset{\frown}{ΖΔ} = 30^o$

Το εμβαδόν Ε του ζητούμενου κυκλικού τμήματος προκύπτει αν από το εμβαδό του κυκλικού τομέα $Ο\overset{\frown}{ΖΔ}$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΖΔ οπότε

$$Ε = \frac{πR^2μ^o}{360^o} - \frac{1}{2}R^2 ημ30^o = \frac{πR^2 30^o}{360^o} - \frac{1}{4}R^2 = \frac{πR^2}{12} - \frac{1}{4}R^2$$

Όμως $α = R\sqrt{2}$ επομένως $R = \frac{α}{\sqrt{2}}$ οπότε $Ε = (\frac{πα^2}{24} - \frac{α^2}{8})$ τετραγωνικές μονάδες

29.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη ΑΒ = R και ΑΓ = $R\sqrt{3}$.Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και (Γ, $R\sqrt{3}$)

Να υπολογίσετε :

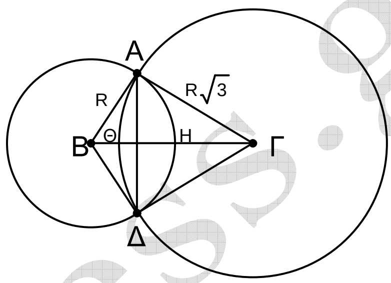
i) Την πλευρά ΒΓ συναρτήσει του R και να εξηγήσετε γιατί οι κύκλοι τέμνονται

ii) Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ

iii) Αν Δ είναι το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R

iv) Το εμβαδό του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R

Προτεινόμενη λύση



i) Από το πυθαγόρειο στο ΑΒΓ έχουμε

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 =$

$= R^2 + 3R^2 = 4R^2$ άρα ΒΓ = 2R

Επίσης για την διαφορά $\rho_2 - \rho_1$και το άθροισμα $\rho_2 + \rho_1$των δύο ακτίνων έχουμε ότι

$\rho_2 - \rho_1 = R\sqrt{3} - R$ και $\rho_2 + \rho_1 = R\sqrt{3} + R$

Επειδή η διάκεντρος ΒΓ = 2R προφανώς ικανοποιεί την σχέση

$R\sqrt{3} - R < 2R < R\sqrt{3} + R$ δηλαδή $\rho_2 - \rho_1 < B\Gamma < \rho_2 + \rho_1$ οι κύκλοι τέμνονται

ii)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΑΒ = R και ΒΓ = 2R δηλαδή

$AB = \dfrac{B\Gamma}{2}$ συνεπώς η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου είναι 30^o οπότε η $\hat{B}$ θα είναι 60^o

iii)

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $A\hat{B}\Delta = 120^o$ επομένως η χορδή ΑΔ του κύκλου (Β , R) θα είναι ίση με την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε αυτόν άρα $A\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

Επειδή οι διαγώνιες του ΑΒΔΓ είναι κάθετες το εμβαδόν Ε αυτού είναι ίσο με

$E = \dfrac{A\Delta \cdot B\Gamma}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}\cdot 2R}{2} = R^2\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες

iv)

Το κοινό μέρος των δύο κύκλων είναι ο μηνίσκος ΑΘΔΗΑ ο οποίος έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων ΑΘΔΑ και ΑΗΔΑ

Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΘΔΑ προκύπτει αν από το εμβαδό του κυκλικού τομέα $\Gamma\widehat{\mathrm{A\Theta\Delta}}$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ οπότε

$$E_{\mathrm{A\Theta\Delta A}} = E_{\Gamma\widehat{\mathrm{A\Theta\Delta}}} - E_{\triangle \mathrm{A\Gamma\Delta}} =$$

$$= \frac{\pi(R\sqrt{3})^2 60^o}{360^o} - \frac{1}{2}(R\sqrt{3})^2 \eta\mu 60^o = \left(\frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\right) \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Ομοίως

$$E_{\mathrm{AH\Delta A}} = E_{\mathrm{B}\widehat{\mathrm{AH\Delta}}} - E_{\triangle \mathrm{AB\Delta}} =$$

$$= \frac{\pi R^2 120^o}{360^o} - \frac{1}{2}R^2 \eta\mu 120^o = \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Επομένως

$$E_{\text{ζητούμενο}} = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{5\pi R^2}{6} - R^2\sqrt{3} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

30.

Δίνεται κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $φ_ν = 150^o$, να βρείτε

i) Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου

ii) Την κεντρική γωνία του πολυγώνου

iii) Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει του R

iv) Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται μεταξύ του κύκλου και του πολυγώνου συναρτήσει του R

Προτεινόμενη λύση

i)

Αν ν είναι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου τότε από τον τύπο

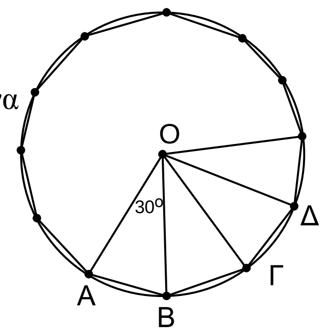
$φ_ν = 180^o - \dfrac{360^o}{ν}$ έχουμε

$150^o = 180^o - \dfrac{360^o}{ν} \Leftrightarrow ν = 12$

ii)

Η κεντρική γωνία $ω_ν$ είναι ίση με $ω_ν = \dfrac{360^o}{ν} = \dfrac{360^o}{12} = 30^o$

iii)



Φέρνοντας τις ακτίνες του δωδεκαγώνου αυτό χωρίζεται σε 12 ίσα μεταξύ τους τρίγωνα επομένως το εμβαδόν του δωδεκάγωνου είναι ίσο με :

$Ε_{12} = 12\,Ε_{ΟΑΒ} = 12 \cdot \dfrac{1}{2} R^2\, ημ30^o =$

$= 3R^2$ τετραγωνικές μονάδες

iv)

Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τον κύκλο και το πολύγωνο είναι ίσο με

$Ε_{ζητούμενο} = Ε_{(O,R)} - Ε_{12} = πR^2 - 3R^2$ τετραγωνικές μονάδες